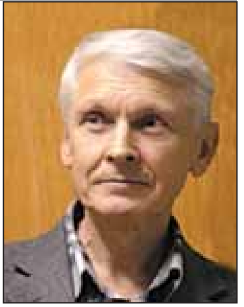

Чивилёв Виктор Иванович
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (МФТИ), Заслуженный работник высшей школы, заместитель председателя научно-методического совета Заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при МФТИ, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Теорема о движении центра масс

Статья посвящена теореме о движении центра масс. Разъяснена формулировка теоремы и приведено её доказательство. На примерах решений конкретных задач показано применение теоремы. Тексты условий и решений всех приведённых ниже задач предложены автором статьи.

ВВЕДЕНИЕ

Движение материальной точки подчиняется законам Ньютона. А как быть с протяжённым телом, к которому в различных его точках приложены силы? Тело под действием этих сил может совершать сложное движение. Возьмите, например, лежащую на столе книгу и потяните за её край вдоль стола. Книга начнёт двигаться в направлении приложенной силы, вращаясь при этом. Скорости и ускорения всех точек книги могут отличаться друг от друга. Возникает вопрос: можно ли записывать для книги уравнение второго закона Ньютона? Если да, то ускорение какой точки книги стоит в уравнении?

Разберём конкретный пример.

Задача 1. На гладком горизонтальном столе находятся два однородных диска с равными массами на одинаковом расстоянии от края AB стола (рис. 1). На диски начинают действовать одновременно одинаковые силы $\vec{F}$, направленные перпендикулярно к краю AB стола и приложенные у одно-

го диска к лёгкой нити, прикреплённой к его центру, а у другого – к лёгкой нити, намотанной на диск. Конец намотанной нити закреплён на диске. Какой диск достигнет края стола раньше?

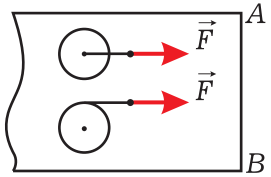

Рис. 1

Решение. Диск, к которому сила приложена в его центре, будет двигаться поступательно. Диск с намотанной нитью будет двигаться с вращением. Края стола достигнет раньше тот диск, ускорение центра которого больше. Итак, для ответа на вопрос задачи надо сравнить ускорения центров дисков. Но как найти эти ускорения, если диски не являются материальными точками?

Возникшая проблема решается с помощью *теоремы о движении центра масс* тела (системы тел), утверждающей, что ускорение центра масс тела не зависит от положений точек приложения сил к телу и равно отношению суммы сил к массе тела. Другими словами, можно мысленно сосредоточить всю массу тела в центре масс, приложить все действующие на тело силы в центре масс и записать уравнение второго закона Ньютона для воображаемой материальной точки, помещённой в центре масс.

В нашей задаче ускорение центра масс каждого диска массой m

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Это значит, что ускорения центров дисков одинаковы! Поэтому *диски достигнут края стола одновременно*. Заметим, что полученный ответ является точным, а не приближённым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Любое протяжённое тело или несколько тел можно разбить мысленно на сколь угодно малые части и считать, что мы имеем дело с системой материальных точек с массами m_1, m_2, ... Эти материальные точки могут двигаться друг относительно друга или не изменять взаимного расположения, что присуще твёрдому телу. Примерами системы материальных точек могут служить несколько молекул, сосуд с жидкостью, соударяющиеся тела, автомобиль вместе с вращающимися колёсами и т.д.

Центром масс системы материальных точек называется такая точка C (рис. 2), радиус-вектор $\vec{R}_c$ которой находится из равенства

$$M\vec{R}_c = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots \qquad (1)$$

Здесь m_1, m_2, ... и $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ... – массы и радиусы-векторы материальных точек, $M = m_1 + m_2 + \ldots$ – масса системы.

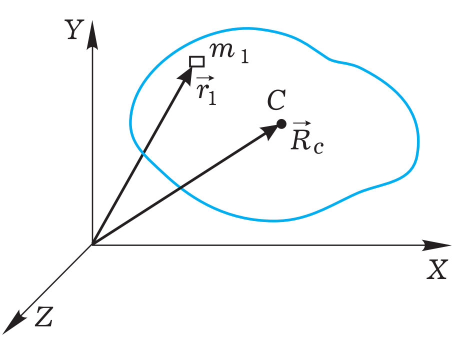

Рис. 2

Приравняем изменения (приращения) за малое время Δt левой и правой частей (1):

$$M\Delta\vec{R}_c = m_1\Delta\vec{r}_1 + m_2\Delta\vec{r}_2 + \ldots$$

Здесь $\Delta\vec{R}_c$, $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, ... – изменения векторов $\vec{R}_c$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ... Разделим последнее равенство на Δt и учтём, что $\Delta\vec{R}_c / \Delta t = \vec{v}_c$ – скорость центра масс, $\Delta\vec{r}_1 / \Delta t = \vec{v}_1$, $\Delta\vec{r}_2 / \Delta t = \vec{v}_2$, ... – скорости материальных точек. Получим

$$M\vec{v}_c = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots \qquad (2)$$

Приравняем изменения за малое время Δt левой и правой частей (2):

$$M\Delta\vec{v}_c = m_1\Delta\vec{v}_1 + m_2\Delta\vec{v}_2 + \ldots$$

Делим последнее равенство на Δt и учитываем, что $\Delta\vec{v}_c / \Delta t = \vec{a}_c$ – ускорение центра масс, $\Delta\vec{v}_1 / \Delta t = \vec{a}_1$, $\Delta\vec{v}_2 / \Delta t = \vec{a}_2$, ... – ускорения материальных точек. Получаем

$$M\vec{a}_c = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots$$

Если система отсчёта, в которой рассматривается наша система материальных точек, инерциальная, то справедлив второй закон Ньютона для первой материальной точки:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{f}_1.$$

Здесь $\vec{F}_1$ – сумма всех внешних сил (со стороны тел, не входящих в систему), действующих на первую материальную точку, $\vec{f}_1$ – сумма всех внутренних сил (со стороны других точек системы), действующих на первую точку. Аналогично для других точек системы. Имеем

$$M\vec{a}_c = \left(\vec{F}_1 + \vec{f}_1\right) + \left(\vec{F}_2 + \vec{f}_2\right) + \ldots$$

Согласно третьему закону Ньютона, сумма всех внутренних сил $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \ldots$ в последнем уравнении равна нулю. Это легко показать, например, для системы из двух или трёх ионов. Обозначим через $\vec{F}$ сумму всех внешних сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., действующих на систему. Имеем

$$\boxed{M\vec{a}_c = \vec{F}.}$$

Итак, *в инерциальной системе отсчёта произведение массы M системы материальных точек на ускорение* $\vec{a}_c$ *её центра масс равно сумме* $\vec{F}$ *всех внешних сил, действующих на систему*. Иначе можно сказать так: *в инерциальной системе отсчёта центр масс системы материальных точек движется как материальная точка с массой, равной массе системы, под действием силы, равной сумме всех внешних сил, действующих на систему*.

Сформулированное утверждение (любое из двух эквивалентных) называется *теоремой о движении центра масс*. Иногда эту теорему называют *законом движения центра масс* или *вторым законом Ньютона для системы материальных точек*.

Замечание 1. Отметим, что при доказательстве теоремы попутно получен важный результат: *импульс системы материальных точек равен произведению массы системы на скорость центра масс*. Это следует из (2), если учесть, что правая часть (2) есть импульс системы.

Замечание 2. Следует понимать и помнить, что теорема о движении центра масс справедлива только в инерциальных системах отсчёта.

ЗАДАЧИ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС

Задача 2. На санках, находящихся на гладкой горизонтальной поверхности льда, укреплён однородный массивный вал, который может вращаться вокруг горизонтальной оси (рис. 3). На вал намотан лёгкий трос, к которому приложена горизонтальная сила $\vec{F}$, перпендикулярная оси вала. Масса санок с валом m. Найдите пройденный санками путь из состояния покоя за время t в двух случаях: 1) вал закреплён; 2) вал может свободно вращаться.

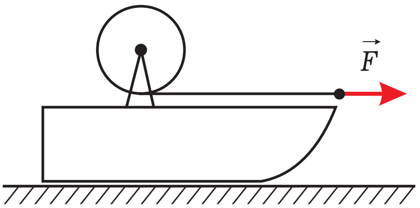

Рис. 3

Решение. Во втором случае имеем достаточно сложное движение санок с валом: санки разгоняются, вал раскручивается.

Рассмотрим систему из санок, вала и лёгкого троса. В обоих случаях положение центра масс системы относительно санок не изменяется, поскольку вращение однородного вала и сматывание легкого (невесомого) троса не смещают центр масс системы относительно санок. Поэтому в обоих случаях перемещения, скорости и ускорения у центра масс и санок совпадают. Опять же в обоих случаях внешние силы, действующие на систему, одни и те же: сила $\vec{F}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормального давления со стороны льда. Из теоремы о движении центра масс следует, что центр масс в каждом случае движется с ускорением

$$a = \frac{F}{m},$$

направленным в сторону силы $\vec{F}$. С таким же ускорением движутся *санки и проходят в обоих случаях путь*

$$S = \frac{at^2}{2} = \frac{Ft^2}{2m}.$$

Заметим, что наличие трения в оси вала не влияет на ответ, поскольку силы трения в оси – внутренние силы.

Задача 3. С наклонной поверхности закреплённого клина с углом наклона к горизонту α скатывается без проскальзывания полый цилиндр с ускорением a (рис. 4). Масса цилиндра m. Найдите силу трения между цилиндром и клином.

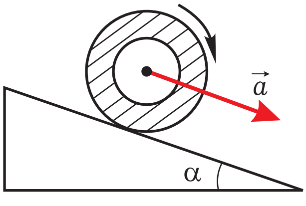

Рис. 4

Решение. За систему материальных точек возьмём цилиндр. На цилиндр действуют внешние силы (рис. 5): со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, со стороны клина – сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Центр масс C цилиндра движется с ускорением $\vec{a}$. По теореме о движении центра масс

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}=m\vec{a}.$$

Запишем это уравнение в проекциях на ось X вдоль наклонной поверхности:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma.$$

Отсюда *сила трения*

$$F_{тр}=m(g\sin\alpha - a).$$

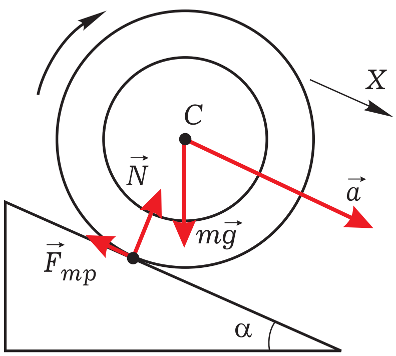

Рис. 5

Задача 4. Бумажный цилиндр длиной L висит на нити на расстоянии $2L$ от стола. Внутри цилиндра на его нижнем торце сидит муха. Масса цилиндра вдвое больше массы мухи. Нить пережигают, и потревоженная муха за время падения цилиндра перелетает к верхнему торцу цилиндра и садится на него. Через какое время после пережигания нити цилиндр ударится о стол? Сопротивление наружного воздуха при падении цилиндра не учитывать.

Решение. Рассмотрим систему из цилиндра и мухи при их падении. Единственная внешняя сила, действующая на систему, – сила тяжести. Независимо от характера полёта мухи и воздействия мухи на цилиндр через воздух внутри цилиндра центр масс будет падать вниз с ускорением $\vec{g}$. Это следует из теоремы о движении центра масс, поскольку силы между мухой и цилиндром есть внутренние силы.

Вначале центр масс был в точке C_1 на расстоянии $L/3$ от нижнего торца цилиндра (рис. 6). При ударе центр масс оказался в точке C_2 на расстоянии $L/3$ от верхнего торца. Смещение центра масс за время падения

$$H=\frac{L}{3}+L+\frac{L}{3}=\frac{5}{3}L.$$

При этом

$$H=\frac{gt^2}{2}.$$

Цилиндр ударится о стол через время

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g}}=\sqrt{\frac{10L}{3g}}.$$

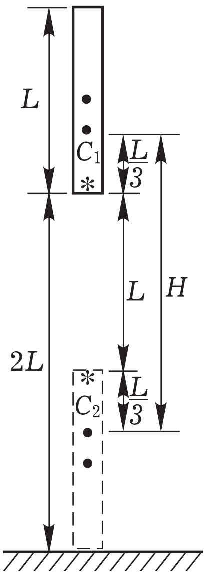

Рис. 6

Задача 5. Обруч, закрученный вокруг горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно плоскости обруча через его центр, бросили вдоль горизонтальной поверхности стола со скоростью v_0, направленной перпендикулярно оси вращения (рис. 7). Обруч сначала удалялся, а затем из-за трения о стол возвратился к месту броска. Коэффициент трения скольжения между обручем и столом μ. На какое максимальное расстояние от места броска удалился обруч?

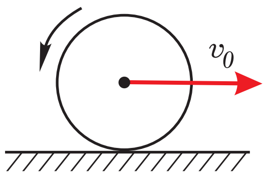

Рис. 7

Решение. Из факта возврата обруча делаем вывод, что при максимальном удалении он продолжал вращаться в прежнем направлении. В противном случае обруч не возвратился бы назад. Это означает, что в процессе удаления обруча он проскальзывал по столу и на него действовала сила трения скольжения.

При замедленном движении обруча на него действуют следующие внешние силы (рис. 8): сила тяжести $m\vec{g}$ со стороны Земли, сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ со стороны стола. По теореме о движении центра масс

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}_c.$$

Здесь $\vec{a}_c$ – ускорение центра масс C, направленное против его скорости. Запишем последнее уравнение в проекциях на оси X и Y:

$$F_{тр} = ma_c, \quad -mg + N = 0.$$

С учётом, что $F_{тр} = \mu N$, находим

$$a_c = \mu g.$$

Центр масс, двигаясь равнозамедленно с ускорением a_c, пройдёт к моменту, когда его скорость станет равна нулю, путь

$$S = \frac{v_0^2}{2a_c} = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Итак, *обруч удалился на максимальное расстояние*

$$S = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

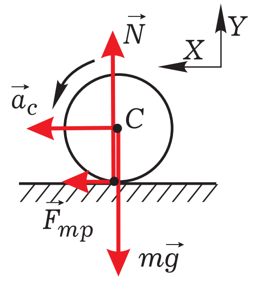

Рис. 8

ЗАДАЧИ НА КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС

Задача 6. По сферической поверхности закреплённой чаши катается без проскальзывания однородный шар массой m (рис. 9). Центр шара при движении остаётся в вертикальной плоскости. Радиус поверхности чаши R, радиус шара r. В момент, когда прямая, проходящая через центр шара и центр кривизны поверхности чаши, составляет угол α с вертикалью, скорость центра шара равна v. С какой силой шар давит на чашу в этот момент?

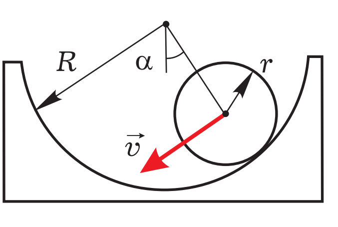

Рис. 9

Решение. Центр масс C шара движется по дуге окружности радиусом $R-r$ неравномерно, имея при угле α некоторое ускорение $\vec{a}$ (рис. 10). На шар действуют сила тяжести $m\vec{g}$ со стороны Земли, сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ со стороны чаши. По теореме о движении центра масс

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}=m\vec{a}.$$

Запишем это уравнение в проекциях на ось X:

$$-mg\cos\alpha+N=ma_n.$$

Здесь $a_n=v^2/(R-r)$ – нормальная составляющая ускорения $\vec{a}$. Отсюда

$$N=m\left(\frac{v^2}{R-r}+g\cos\alpha\right).$$

Согласно третьему закону Ньютона *шар давит на чашу с такой же по модулю силой* N в направлении, противоположном вектору $\vec{N}$.

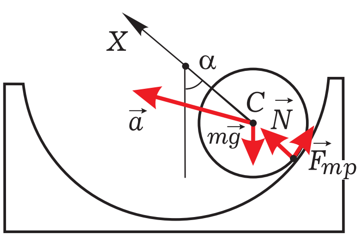

Рис. 10

Задача 7. По гладкой горизонтальной поверхности стола движется тонкий однородный стержень постоянного поперечного сечения, вращаясь вокруг вертикальной оси O с угловой скоростью ω (рис. 11). Масса стержня m, $OA=L$, $AB=4L$. Определите силу натяжения стержня в сечении A.

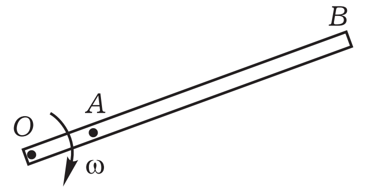

Рис. 11

Решение. Центр масс участка AB стержня движется равномерно по окружности радиусом $3L$ с центростремительным ускорением $a=\omega^2\cdot 3L$, направленным к оси вращения O. Масса участка AB $m_1=\frac{4}{5}m$. На участок AB действуют внешние силы: сила тяжести со стороны Земли и сила нормального давления со стороны стола, направленные обе вертикально, сила натяжения F со стороны участка AO, направленная к оси вращения O. Запишем в проекциях на направление AO уравнение второго закона Ньютона для участка AB (применим к участку AB теорему о движении центра масс):

$$F=m_1a.$$

С учётом выражений для m_1 и a находим, что *сила натяжения стержня в сечении* A

$$F=\frac{12}{5}m\omega^2L.$$

Задача 8. Тонкая запаянная с одного конца трубка заполнена жидкостью и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис. 12). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке. Атмосферное давление P_0, плотность жидкости ρ. 1) Найти давление жидкости в месте изгиба трубки. 2) Найти давление жидкости у запаянного конца трубки. (Вступительные экзамены МФТИ, 1996 г.)

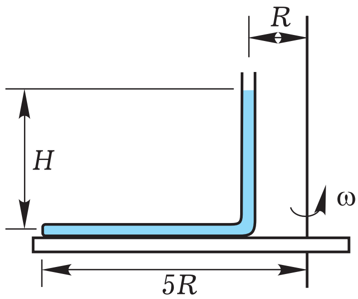

Рис. 12

Решение. Можно сразу сказать, что вращение не влияет на давление P_B в месте изгиба трубки и поэтому

$$P_B = P_0 + \rho g H.$$

Изложенное выше утверждение не совсем очевидно. Найдём P_B более строго.

Выделим мысленно в вертикальном колене цилиндр из жидкости длиной H с площадью основания S (рис. 13). На этот цилиндр массой $m_1 = \rho HS$ действует сила тяжести, равная $m_1 g$. На торцы цилиндра действует окружающая среда с силами, равными $P_0 S$ и $P_B S$. На боковую поверхность цилиндра действуют горизонтально направленные силы со стороны окружающей жидкости (на рисунке не показаны). Ускорение центра масс цилиндра $a_1 = \omega^2 R$. Запишем для этого цилиндра уравнение второго закона Ньютона в проекциях на вертикальную ось Y:

$$P_B S - P_0 S - m_1 g = 0.$$

Полученное уравнение отражает применение к цилиндру теоремы о движении центра масс. С учётом выражения для m_1 находим *давление в месте изгиба трубки*:

$$P_B = P_0 + \rho g H.$$

Для нахождения давления P_K у запаянного конца трубки выделим мысленно в жидкости цилиндр KB длиной $4R$ с площадью основания S. Масса цилиндра $m_2 = 4RS\rho$. Центр масс этого цилиндра движется по окружности радиусом $3R$ с ускорением $a_2 = \omega^2 \cdot 3R$. Со стороны окружающей жидкости на торцы цилиндра действуют силы, равные $P_K S$ и $P_B S$. На цилиндр KB действуют перпендикулярно его оси ещё сила тяжести и силы на боковую поверхность со стороны окружающей жидкости (на рисунке не показаны). Запишем для цилиндра KB уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось X:

$$P_K S - P_B S = m_2 a_2.$$

С учётом выражений для P_B, m_2 и a_2 находим *давление у запаянного конца трубки:*

$$P_K = P_0 + \rho g H + 12\rho\omega^2 R^2.$$

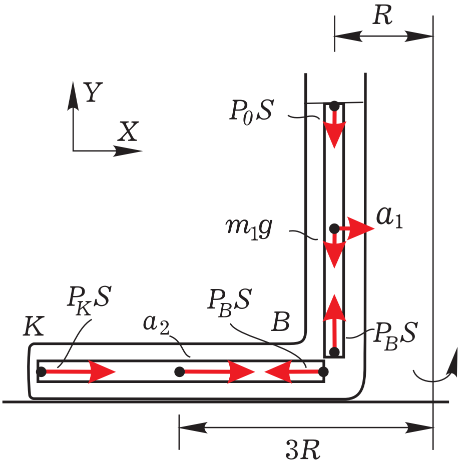

Рис. 13